

В предельной ситуации $b_1 = b_2 = b_3 = b$ существуют интегрируемые случаи, определяемые двумя связями

$$(19) \quad c_1 c_2 c_3 (c_3^{-2} - c_1^{-2}) = a_1 - a_3, \quad c_1 c_2 c_3 (c_2^{-2} - c_3^{-2}) = a_3 - a_2$$

и содержащие поэтому пять свободных параметров. Коэффициенты α_i , x имеют вид (15), $\beta_1 = c_3 \alpha_1 / c_2$, $\beta_2 = c_3 \alpha_2 / c_1$, $y = 0$. Аналогично предыдущему уравнение Эйлера (3) при выполнении связей (19) имеет дополнительный интеграл

$$(20) \quad I_4 = (a_1 - a_3)(M_1 + c_3 K_1 / c_2)^2 + (a_2 - a_3)(M_2 + c_3 K_2 / c_1)^2$$

и является поэтому вполне интегрируемым по Лиувиллю.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР, Москва

Поступило
22 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стеков В.А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893. 2. *Ляпунов А.М.* — Сообщ. Харьковск. матем. общ-ва, 1893, т. IV, вып. 1, 2. 3. *Новиков С.П.* — Функциональный анализ и его прилож., 1981, т. 15, № 4, с. 37–53. 4. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 5. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. М.: Университ. типография, 1897. 6. *Колосов Г.В.* — Изв. Росийск. Акад. наук, 1919, с. 1–6.

УДК 517.946:519.46

МАТЕМАТИКА

В.С. ДРЮМА

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

(Представлено академиком С.П. Новиковым 10 V 1982)

1. В работе [1] выведено нелинейное уравнение для поверхностных волн в жидкости, характеризующихся малым отклонением от осевой симметрии:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(u_t + uu_x + \frac{u_{xxx}}{2} + \frac{u}{2t} \right) + \frac{3\alpha^2}{2t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

где α — произвольный численный параметр. Это уравнение является "двумерным" аналогом известного цилиндрического уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) [2] и по характеру своего приближения относится к уравнениям типа Кадомцева–Петвиашвили [3]. Последнее замечание подтверждается еще и тем, что к уравнению (1) возможно применение метода обратной задачи теории рассеяния [3].

L , A -представление для уравнения (1) запишем в форме Захарова–Шабата

$$(2) \quad \left[\alpha \frac{\partial}{\partial y} - L, \frac{\partial}{\partial t} - A \right] = 0$$

с операторами L и A вида

$$L = t \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{tu}{3} - \frac{x}{6},$$

$$(3) \quad A = -2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - u \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{u_x}{2} + \frac{\alpha}{2t} \int^x u_y dx \right).$$

Представление уравнения (1) в форме (2), (3) относится к типу представлений с нестандартной операторной структурой ввиду явной зависимости оператора L от переменных x и t (ср. с [4]). Известно [5], что в этом случае задача интегрирования соответствующего нелинейного уравнения обладает некоторыми особенностями по сравнению со стандартной схемой метода обратной задачи.

2. Для построения простейших классов решений уравнения (1) воспользуемся теорией дарбу-преобразований, развитой в работах В.Б. Матвеева применительно к нелинейным уравнениям, интегрируемым при помощи метода обратной задачи (см. [6]).

Легко видеть, что система уравнений

$$\begin{aligned} \alpha \psi_y &= t \psi_{xx} + \left(\frac{tu}{3} - \frac{x}{6} \right) \psi, \\ \psi_t &= -2\psi_{xxx} - u\psi_x - \left(\frac{u_x}{2} + \frac{\alpha}{2t} \int u_y dx \right) \psi, \end{aligned} \quad (4)$$

отвечающая представлению (2), инвариантна относительно преобразований вида

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u + 6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \psi_1, \\ \tilde{\psi} &= \psi_{2x} - \psi_2 \frac{\partial}{\partial x} \ln \psi_1, \end{aligned} \quad (5)$$

где ψ_1 и ψ_2 — линейно-независимые решения системы (4) при некотором фиксированном выборе функции $u(x, y, t)$, являющейся решением уравнения (1). N -кратное применение преобразований вида (5) приводит в данном случае к общей формуле для преобразования "затравочного" решения u в некоторое другое

$$(6) \quad \tilde{u}_N = u + 6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A_N,$$

где A_N — матрица с матричными элементами $a_{ij} = \frac{d^{j-1} \psi_i}{dx^{j-1}}$, а ψ_i — линейно-независимые решения системы (4), отвечающие заданной функции $u(x, y, t)$, $i, j = 1, 2, 3, \dots, N-1$. Приведем несколько примеров использования указанной схемы для нахождения решений уравнения (1).

3. а) Классы решений, порождаемые тривиальным решением $u=0$ исходного уравнения (1). В этом случае система уравнений (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha \psi_y &= t \psi_{xx} - \frac{x}{6} \psi, \\ \psi_t &= -2\psi_{xxx}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ее решениям с разделяющимися переменными

$$(8) \quad \psi_n = \frac{c_n}{\sqrt[3]{t}} \text{Ai} \left[\frac{x + 6\nu_n}{\sqrt[3]{6t}} \right] \exp \left[\frac{\nu_n}{\alpha} y \right]$$

отвечают согласно (6) решения уравнения (1), не зависящие от переменной y , т.е. решения цилиндрического уравнения КдФ. Решения более общего вида

$$(9) \quad \psi_1 = c_1 \exp \left[\frac{ty^3}{108\alpha^3} - \frac{xy}{6\alpha} \right],$$

$$\psi_2 = \frac{c_2}{y^3\sqrt{t}} \int \text{Ai} \left[\frac{z}{y^3\sqrt{6t}} \right] \exp \left[\frac{z-xy}{6\alpha} \right] dz, \quad \psi_3 = \frac{c_3}{y^3\sqrt{t}} \int \text{Bi} \left[\frac{z}{y^3\sqrt{6t}} \right] \exp \left[\frac{z-xy}{6\alpha} \right] dz,$$

где Ai , Bi — символы функций Эйри, c_i — произвольные постоянные, приводят к решениям уравнения (1), зависящим от всех переменных.

б) Дробно-рациональные решения и их обобщения. Простейшие представители этого класса решений уравнения (1) строятся на основе "затравочных" решений вида

$$(10) \quad u = \frac{x + \gamma y}{2t},$$

где γ — параметр. Данному случаю отвечает согласно (4) система уравнений

$$(11) \quad \begin{aligned} \alpha \psi_y &= t \psi_{xx} + \frac{\gamma y}{6} \psi, \\ \psi_t &= -2\psi_{xxx} - \frac{x + \gamma y}{2t} \psi_x - \left(\frac{1}{4t} + \frac{\alpha \gamma x}{4t^2} \right) \psi. \end{aligned}$$

Ее решение удобно представить в виде формального степенного ряда по переменным y и $\xi = x\sqrt{\alpha/t}$

$$(12) \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k \partial^{2k} B(\xi)}{k! \partial \xi^{2k}} \exp \left[\frac{\gamma y^2}{12\alpha} \xi \right].$$

Функция $B(\xi)$ при этом удовлетворяет уравнению

$$(13) \quad B_{\xi\xi\xi} + \frac{\gamma\xi}{8\alpha} B = 0.$$

При $\gamma = 0$ ряд (12) обрывается и дает решение системы (11) вида

$$(14) \quad \psi = \frac{1}{t^{5/4}} [\alpha a x^2 + \alpha b x \sqrt{t} + 2at y + ct],$$

a, b, c — произвольные постоянные. После подстановки (14) в (5) получаем простейшее дробно-рациональное решение уравнения (1).

Автор благодарит Ю.А. Степанянца за полезные обсуждения.

Институт математики с Вычислительным центром
Академии наук МССР, Кишинев

Поступило
25 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Jonson R.S. — J.Fluid Mech., 1980, vol. 97, part 4, p. 701–719.
2. Луговцов Б.Б., Луговцов А.Б. — В сб.: Динамика сплошной среды, 1964, вып. 1, с. 195–206.
3. Теория солитонов/Под ред. С.П. Новикова. М.: Наука, 1980.
4. Дрюма В.С. — Изв. АН МССР, 1976, № 3, с. 11.
5. Лебедев Д.Р., Савостьянов М.В. Расслоения над рациональными кривыми с особенностями и солитонные решения некоторых волновых уравнений. Препринт. ИТЭФ-13. М., 1979.
6. Matveev V.B. — Lett.Math.Phys., 1979, vol. 3, p. 213–216.