

ПРИЛОЖЕНИЯ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ И ГЕОМЕТРИИ ЭЙНШТЕЙНА–ВЕЙЛЯ В ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрены некоторые свойства четырехмерных римановых пространств, метрические коэффициенты которых связаны с коэффициентами нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Исследованы свойства трехмерных пространств Эйнштейна–Вейля, связанных с дуальными уравнениями $b'' = g(a, b, b')$, в которых функция $g(a, b, b')$ удовлетворяет специальному дифференциальному уравнению в частных производных.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) второго порядка и вида

$$y'' + a_1(x, y)y'^3 + 3a_2(x, y)y'^2 + 3a_3(x, y)y' + a_4(x, y) = 0 \quad (1)$$

связаны с нелинейной динамической системой, задаваемой следующими формулами:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z, \alpha_i), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z, \alpha_i), \quad \frac{dz}{dt} = R(x, y, z, \alpha_i),$$

где α_i – некоторые параметры. Например, система Лоренца

$$\dot{X} = \sigma(Y - X), \quad \dot{Y} = rX - Y - ZX, \quad \dot{Z} = XY - bZ,$$

проявляющая свойства хаотической системы при некоторых значениях параметров σ , r , b , оказывается эквивалентной уравнению

$$y'' - \frac{3}{y}y'^2 + \left(\alpha y - \frac{1}{x}\right)y' + \epsilon xy^4 - \beta x^3 y^4 - \beta x^2 y^3 - \gamma y^3 + \delta \frac{y^2}{x} = 0, \quad (2)$$

где

$$\alpha = \frac{b + \sigma + 1}{\sigma}, \quad \beta = \frac{1}{\sigma^2}, \quad \gamma = \frac{b(\sigma + 1)}{\sigma^2}, \quad \delta = \frac{(\sigma + 1)}{\sigma}, \quad \epsilon = \frac{b(r - 1)}{\sigma^2}.$$

*Институт математики и информатики, Кишинев, Молдова. E-mail: valery@gala.moldova.su

Свойства этого уравнения были исследованы в работах [1]–[5] с использованием теории инвариантов. В соответствии с этой теорией [6]–[10] все уравнения вида (1) могут быть разбиты на два класса в зависимости от того, равен или не равен нулю коэффициент ν_5 :

$$\nu_5 = L_2(L_1L_{2x} - L_2L_{1x}) + L_1(L_2L_{1y} - L_1L_{2y}) - a_1L_1^3 + 3a_2L_1^2L_2 - 3a_3L_1L_2^2 + a_4L_2^3,$$

где L_1 и L_2 , в свою очередь, задаются формулами

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial}{\partial y}(a_{4y} + 3a_2a_4) - \frac{\partial}{\partial x}(2a_{3y} - a_{2x} + a_1a_4) - 3a_3(2a_{3y} - a_{2x}) - a_4a_{1x}, \\ L_2 &= \frac{\partial}{\partial x}(a_{1x} - 3a_1a_3) + \frac{\partial}{\partial y}(a_{3y} - 2a_{2x} + a_1a_4) - 3a_2(a_{3y} - 2a_{2x}) + a_1a_{4y}. \end{aligned}$$

Для уравнений с $\nu_5 = 0$ Лиувилль открыл набор полуинвариантов, начинающихся с

$$w_1 = \frac{1}{L_1^4} [L_1^3(\alpha' L_1 - \alpha'' L_2) + R_1(L_1^2)_x - L_1^2 R_{1x} + L_1 R_1(a_3 L_1 - a_4 L_2)],$$

где $R_1 = L_1L_{2x} - L_2L_{1x} + a_2L_1^2 - 2a_3L_1L_2 + a_4L_2^2$ и

$$\begin{aligned} \alpha &= a_{2y} - a_{1x} + 2(a_1a_3 - a_2^2), \\ \alpha' &= a_{3y} - a_{2x} + a_1a_4 - a_2a_3, \\ \alpha'' &= a_{4y} - a_{3x} + 2(a_2a_4 - a_3^2). \end{aligned}$$

В случае, когда $\nu_5 \neq 0$, полуинварианты имеют вид

$$\nu_{m+5} = L_1 \frac{\partial \nu_m}{\partial y} - L_2 \frac{\partial \nu_m}{\partial x} + m \nu_m \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} \right),$$

а соответствующая серия полных инвариантов задается формулой

$$[5t_m - (m-2)t_7t_{m-2}]\nu_5^{2/5} = 5 \left(L_1 \frac{\partial t_{m-2}}{\partial y} - L_2 \frac{\partial t_{m-2}}{\partial x} \right),$$

где $t_m = \nu_m \nu_5^{-m/5}$.

2. РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ОДУ

Для построения римановых пространств, связанных с уравнением (1), выпишем уравнения геодезических в двумерном пространстве A_2 , снабженном аффинной (или римановой) связностью,

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \Gamma_{11}^1 \dot{x}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{x}\dot{y} + \Gamma_{22}^1 \dot{y}^2 &= 0, \\ \ddot{y} + \Gamma_{11}^2 \dot{x}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{x}\dot{y} + \Gamma_{22}^2 \dot{y}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений эквивалентна единственному уравнению

$$y'' - \Gamma_{22}^1 y'^3 + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) y'^2 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) y' + \Gamma_{11}^2 = 0,$$

которое является уравнением типа (1) со специальным выбором коэффициентов $a_i(x, y)$.

Уравнение (1) с произвольными коэффициентами $a_i(x, y)$ может быть интерпретировано как уравнение геодезической в двумерном пространстве A_2 :

$$\begin{aligned}\ddot{x} - a_3 \dot{x}^2 - 2a_2 \dot{x}\dot{y} - a_1 \dot{y}^2 &= 0, \\ \ddot{y} + a_4 \dot{x}^2 + 2a_3 \dot{x}\dot{y} + a_2 \dot{y}^2 &= 0,\end{aligned}$$

проективная связность которого имеет компоненты

$$\Pi_1 = \begin{vmatrix} -a_3 & -a_2 \\ a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{vmatrix} -a_2 & -a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Тензор кривизны связности такого типа имеет вид

$$R_{12} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} + [\Pi_1, \Pi_2],$$

а его компоненты выражаются формулами

$$\begin{aligned}R_{112}^1 &= a_{3y} - a_{2x} + a_1 a_4 - a_2 a_3 = \alpha', & R_{212}^1 &= a_{2y} - a_{1x} + 2(a_1 a_3 - a_2^2) = \alpha, \\ R_{112}^2 &= a_{3x} - a_{4y} + 2(a_3^2 - a_2 a_4) = -\alpha'', & R_{212}^2 &= a_{2x} - a_{3y} + a_3 a_2 - a_1 a_4 = -\alpha'.$$

Для построения риманова пространства, связанного с уравнением вида (1), используется риманово расширение W^4 пространства A_2 со связностью Π_{ij}^k [11]. Соответствующая метрика имеет вид

$$ds^2 = -2\Pi_{ij}^k \xi_k dx^i dx^j + 2 d\xi_i dx^i.$$

В исследуемом случае (когда $\xi_1 = z$ и $\xi_2 = \tau$) эта метрика дается формулой

$$ds^2 = 2(za_3 - \tau a_4) dx^2 + 4(za_2 - \tau a_3) dx dy + 2(za_1 - \tau a_2) dy^2 + 2dx dz + 2dy d\tau. \quad (3)$$

Теперь можно сформулировать утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для заданного уравнения типа (1) получим риманово пространство с метрикой (3), часть геодезических кривых которого суть интегральные кривые данного уравнения.*

Вычисляя геодезические для пространства W^4 с метрикой (3), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2x}{ds^2} - a_3 \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - 2a_2 \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} - a_1 \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 0, \\
& \frac{d^2y}{ds^2} + a_4 \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + 2a_3 \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + a_2 \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 0, \\
& \frac{d^2z}{ds^2} + [z(a_{4y} - \alpha'') - \tau a_{4x}] \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \\
& \quad + 2[z a_{3y} - \tau(a_{3x} + \alpha'')] \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + [z(a_{2y} + \alpha) - \tau(a_{2x} + 2\alpha')] \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \\
& \quad + 2a_3 \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds} - 2a_4 \frac{dx}{ds} \frac{d\tau}{ds} + 2a_2 \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} - 2a_3 \frac{dy}{ds} \frac{d\tau}{ds} = 0, \\
& \frac{d^2\tau}{ds^2} + [z(a_{3y} - 2\alpha') - \tau(a_{3x} - \alpha'')] \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \\
& \quad + 2[z(a_{2y} - \alpha) - \tau a_{2x}] \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + [z a_{1y} - \tau(a_{1x} + \alpha)] \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \\
& \quad + 2a_2 \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds} - 2a_3 \frac{dx}{ds} \frac{d\tau}{ds} + 2a_1 \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} - 2a_2 \frac{dy}{ds} \frac{d\tau}{ds} = 0.
\end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет интеграл движения

$$2(za_3 - \tau a_4)\dot{x}^2 + 4(za_2 - \tau a_3)\dot{x}\dot{y} + 2(za_1 - \tau a_2)\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{z} + 2\dot{y}\dot{\tau} = 1.$$

Заметим также, что первые два уравнения этой системы эквивалентны уравнению (1).

Таким образом, построено четырехмерное риманово пространство с метрикой (3) и связностью

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \begin{vmatrix} -a_3 & -a_2 & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & 0 & 0 \\ z(a_{4y} - \alpha'') - \tau a_{4x} & z a_{3y} - \tau(a_{3x} + \alpha'') & a_3 & -a_4 \\ z(a_{3y} - 2\alpha') - \tau(a_{3x} - \alpha'') & z(a_{2y} - \alpha) - \tau a_{2x} & a_2 & -a_3 \end{vmatrix}, \\
\Gamma_2 &= \begin{vmatrix} -a_2 & -a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 \\ z a_{3y} - \tau(a_{3x} + \alpha'') & z(a_{2y} + \alpha) - \tau(a_{2x} + 2\alpha') & a_2 & -a_3 \\ z(a_{2y} - \alpha) - \tau a_{2x} & z a_{1y} - \tau(a_{1x} + \alpha) & a_1 & -a_2 \end{vmatrix}, \\
\Gamma_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_4 & -a_3 & 0 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Тензор кривизны этой метрики имеет вид

$$\begin{aligned}
 R_{112}^1 &= -R_{312}^3 = -R_{212}^2 = R_{412}^4 = \alpha', \\
 R_{212}^1 &= -R_{312}^4 = \alpha, \quad R_{112}^2 = -R_{412}^3 = -\alpha'', \\
 R_{312}^1 &= R_{412}^1 = R_{312}^2 = R_{412}^2 = 0, \\
 R_{112}^3 &= 2z(a_2\alpha'' - a_3\alpha') + 2\tau(a_4\alpha' - a_3\alpha''), \\
 R_{212}^4 &= 2z(a_3\alpha' - a_2\alpha) + 2\tau(a_3\alpha - a_2\alpha'), \\
 R_{212}^3 &= z(\alpha_x - \alpha'_y + a_1\alpha'' - a_3\alpha) + \tau(\alpha''_y - \alpha'_x + a_4\alpha - a_2\alpha''), \\
 R_{112}^4 &= z(\alpha'_y - \alpha_x + a_1\alpha'' - a_3\alpha) + \tau(\alpha'_x - \alpha''_y + a_4\alpha - a_2\alpha'').
 \end{aligned}$$

Используя следующие выражения для компонент проективной кривизны пространства A_2 :

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \alpha''_y - \alpha'_x + a_2\alpha'' + a_4\alpha - 2a_3\alpha', \\
 L_2 &= \alpha'_y - \alpha_x + a_1\alpha'' + a_3\alpha - 2a_2\alpha',
 \end{aligned}$$

можно записать компоненты тензора кривизны:

$$\begin{aligned}
 R_{112}^4 &= z(L_2 + 2a_2\alpha' - 2a_3\alpha) - \tau(L_1 + 2a_3\alpha' - 2a_4\alpha), \\
 R_{212}^3 &= z(-L_2 + 2a_1\alpha'' - 2a_2\alpha') + \tau(L_1 + 2a_3\alpha' - 2a_2\alpha''), \\
 R_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha' & 0 & 0 \\ \alpha' & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad R_{14} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha'' & 0 & 0 \\ -\alpha'' & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\
 R_{23} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad R_{24} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & 0 & 0 \\ -\alpha' & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\
 R_{j34}^i &= 0.
 \end{aligned}$$

Компоненты тензора Риччи $R_{ik} = R_{il}^l{}_{ik}$ пространства M^4 имеют вид

$$R_{11} = 2\alpha'', \quad R_{12} = 2\alpha', \quad R_{22} = 2\alpha,$$

а скалярная кривизна $R = g^{in}g^{km}R_{nm}$ пространства M^4 обращается в нуль: $R = 0$.

Введем теперь тензор

$$L_{ijk} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} = R_{ij;k} - R_{ik;j}$$

с компонентами

$$L_{112} = -L_{121} = 2L_1, \quad L_{221} = L_{212} = -2L_2.$$

Инварианты уравнения (1) могут быть выражены через ковариантные производные тензора кривизны и величины L_1 и L_2 .

Тензор Вейля пространства M^4

$$C_{lijk} = R_{lijk} + \frac{1}{2}(g_{jl}R_{ik} + g_{ik}R_{jl} - g_{jk}R_{il} - g_{il}R_{jk}) + \frac{R}{6}(g_{jk}g_{il} - g_{jl}g_{ik})$$

имеет единственную ненулевую компоненту $C_{1212} = tL_1 - zL_2$. Исследуя уравнение

$$|R_{ab} - \lambda g_{ab}| = 0,$$

где матрица R_{ab} строится из компонент тензора Римана

$$\begin{aligned} R_{1412} &= \alpha'', & R_{2412} &= \alpha', & R_{2312} &= -\alpha, & R_{3112} &= \alpha', \\ R_{1212} &= z(\alpha_x - \alpha'_y + a_1\alpha'' - 2a_2\alpha' + a_3\alpha) + t(\alpha''_y - \alpha'_x - a_4\alpha + 2a_3\alpha' - a_3\alpha''), \end{aligned}$$

получим, что пространство M^4 имеет тип N и все инварианты второго порядка пространства M^4 обращаются в нуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пространства с метрикой (3) оказываются плоскими для уравнения (1) при условиях $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$ и $\alpha'' = 0$, наложенных на коэффициенты $a_i(x, y)$. Компоненты проективной кривизны для этих уравнений обращаются в нуль ($L_1 = 0$ и $L_2 = 0$), и тогда после локального преобразования эти условия принимают форму $y'' = 0$.

С другой стороны, имеются примеры уравнения (1) с условиями $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$, но с функциями $\alpha \neq 0$, $\alpha' \neq 0$ и $\alpha'' \neq 0$. Для таких уравнений кривизны соответствующих римановых пространств в нуль не обращаются. В самом деле, рассматривая уравнение

$$y'' + 2e^\varphi y'^3 - \varphi_y y'^2 + \varphi_x y' - 2e^\varphi = 0,$$

в котором функция $\varphi(x, y)$ есть решение нелинейного уравнения Вильчинского–Цицейки

$$\varphi_{xy} = 4e^{2\varphi} - e^{-\varphi},$$

интегрируемого с помощью метода обратной задачи, получим, что для этого уравнения $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$, но $\alpha \neq 0$, $\alpha' \neq 0$ и $\alpha'' \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Особенно интересно исследовать свойства пространств с метрикой (3) и уравнение (2) при коэффициентах, приводящих к хаотическому поведению решений ($\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r > 24$). В частности, интересно исследовать уравнения геодезического отклонения

$$\frac{d^2 \eta^i}{ds^2} + 2\Gamma_{lm}^i \frac{dx^m}{ds} \frac{d\eta^l}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^j} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} \eta^j = 0.$$

Рассмотрим теперь некоторые приложения теории солитонов к исследованию свойств уравнений типа (1). Эти приложения основаны на представлении метрики (3) в виде

$$ds^2 = 2z(a_3 dx^2 + 2a_2 dx dy + a_1 dy^2) - 2\tau(a_4 dx^2 + 2a_3 dx dy + a_2 dy^2) + 2 dx dz + 2 dy d\tau$$

или

$$ds^2 = 2z ds_1^2 - 2\tau ds_2^2 + 2 dx dz + 2 dy d\tau.$$

Например, метрика, соответствующая уравнению

$$y'' + H^2(x, y)y'^3 + 3y' = 0$$

представляется в виде

$$ds^2 = 2z(dx^2 + H^2 dy^2) - 4\tau dx dy + 2 dx dz + 2 dy d\tau,$$

содержащем двумерную часть

$$ds_1^2 = dx^2 + H^2 dy^2, \quad (4)$$

связанную с уравнением КдФ

$$K_y + K K_x + K_{xxx} = 0,$$

которому удовлетворяет кривизна $K(x, y)$ метрики (4).

Метрика, отвечающая уравнению

$$y'' + y'^3 + 3 \cos H(x, y)y'^2 + y' = 0,$$

связана с интегрируемым уравнением

$$H_{xy} = \sin H.$$

3. СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Метрика, отвечающая уравнению (1), может быть использована также для построения поверхностей. Один из возможных способов это сделать – вложить двумерные поверхности, являющиеся обобщениями поверхностей трансляции, в данное четырехмерное пространство. Уравнения на координаты $Z^i(x, y)$ таких поверхностей имеют вид

$$\frac{\partial^2 Z^i}{\partial x \partial y} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial Z^j}{\partial x} \frac{\partial Z^k}{\partial y} = 0.$$

Тогда коэффициенты $a_i(x, y)$ и соответствующие ОДУ второго порядка получаются из условия совместности для этой системы.

Другая возможность исследовать двумерные поверхности в пространстве с метрикой (3) состоит в исследовании сечений

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z(x, y), \quad \tau = \tau(x, y)$$

в таких пространствах. Из выражений

$$dz = z_x dx + z_y dy, \quad d\tau = \tau_x dx + \tau_y dy$$

можно получить метрику

$$ds^2 = 2(z_x + za_3 - \tau a_4) dx^2 + 2(\tau_x + z_y + 2za_2 - 2\tau a_3) dx dy + 2(\tau_y + za_1 - \tau a_2) dy^2.$$

Ниже подобные представления используются для исследования частных случаев уравнения (1).

1. Функции z и τ , выбранные в виде

$$z_x + za_3 - \tau a_4 = 0, \quad \tau_x + z_y + 2za_2 - 2\tau a_3 = 0, \quad \tau_y + za_1 - \tau a_2 = 0,$$

задают плоские поверхности. С помощью подстановки $z = \Phi_x$, $\tau = \Phi_y$ эта система уравнений может быть приведена к системе

$$\Phi_{xx} = a_4 \Phi_y - a_3 \Phi_x, \quad \Phi_{xy} = a_3 \Phi_y - a_2 \Phi_x, \quad \Phi_{yy} = a_2 \Phi_y - a_1 \Phi_x,$$

которая совместна с условиями $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$ и $\alpha'' = 0$.

2. Выберем теперь функции $z = \Phi_x$ и $\tau = \Phi_y$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\Phi_{xx} = a_4 \Phi_y - a_3 \Phi_x, \quad \Phi_{yy} = a_2 \Phi_y - a_1 \Phi_x,$$

где коэффициенты $a_i(x, y)$ представляются в виде

$$a_4 = R_{xxx}, \quad a_3 = -R_{xyy}, \quad a_2 = R_{xyy}, \quad a_1 = R_{yyy}.$$

Функция $R(x, y)$ есть решение уравнения Виттена–Дойграфа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ)

$$R_{xxx}R_{yyy} - R_{xxy}R_{xyy} = 1.$$

Эти функции отвечают уравнению (1), записанному в виде

$$y'' - R_{yyy}y'^3 + 3R_{xyy}y'^2 - 3R_{xxy}y' + R_{xxx} = 0.$$

Выбирая коэффициенты a_i в виде

$$a_4 = -2\omega, \quad a_1 = 2\omega, \quad a_3 = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad a_2 = -\frac{\omega_y}{\omega},$$

получим систему уравнений

$$\Phi_{xx} + \frac{\omega_x}{\omega} \Phi_x + 2\omega \Phi_y = 0, \quad \Phi_{yy} + 2\omega \Phi_x + \frac{\omega_y}{\omega} \Phi_y = 0,$$

условие совместности которой

$$\frac{\partial^2 \ln \omega}{\partial x \partial y} = 4\omega^2 + \frac{\kappa}{\omega}$$

есть не что иное, как уравнение Вильчинского–Цицейки.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Линейная система уравнений для уравнения ВДВВ задает некоторые поверхности в трехмерном проективном пространстве. Каноническая форма этой системы уравнений имеет вид [12]

$$\begin{aligned}\Phi_{xx} - R_{xxx}\Phi_y + \left(\frac{R_{xxxx}}{2} - \frac{R_{xxy}^2}{4} - \frac{R_{xxx}R_{xxy}}{2} \right) \Phi &= 0, \\ \Phi_{yy} - R_{yyy}\Phi_x + \left(\frac{R_{yyyy}}{2} - \frac{R_{xyy}^2}{4} - \frac{R_{yyy}R_{xxy}}{2} \right) \Phi &= 0.\end{aligned}$$

Соотношения между инвариантами Вильчинского для линейной системы порождают различные типы поверхностей. Некоторые из этих инвариантов связаны с решениями уравнения ВДВВ.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Рассмотрим систему уравнений $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 2\Gamma_{ij}^k \xi_k$ на векторы Киллинга метрики (3). Эта система, записанная в компонентах, имеет вид

$$\begin{aligned}\xi_{1x} &= -a_3\xi_1 + a_4\xi_2 + (zA - ta_{4x})\xi_3 + (zE + tF)\xi_4, \\ \xi_{2y} &= -a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + (zC + tD)\xi_3 + (za_{1y} - tH)\xi_4, \\ \xi_{1y} + \xi_{2x} &= 2[-a_2\xi_1 + a_3\xi_2 + (za_{3y} - tB)\xi_3 + (zG - ta_{2x})\xi_4], \\ \xi_{1z} + \xi_{3x} &= 2[a_3\xi_3 + a_2\xi_4], \quad \xi_{1t} + \xi_{4x} = 2[-a_4\xi_3 - a_3\xi_4], \\ \xi_{2z} + \xi_{3y} &= 2[a_2\xi_3 + a_1\xi_4], \quad \xi_{2t} + \xi_{4y} = -2[a_3\xi_3 - a_2\xi_4], \\ \xi_{3z} &= 0, \quad \xi_{4t} = 0.\end{aligned}$$

В частном случае, когда $\xi_3 = \xi_4 = 0$ и $\xi_i = \xi_i(x, y)$, получается система уравнений

$$\begin{aligned}\xi_{1x} &= -a_3\xi_1 + a_4\xi_2, \quad \xi_{2y} = -a_1\xi_1 + a_2\xi_2, \\ \xi_{1y} + \xi_{2x} &= 2[-a_2\xi_1 + a_3\xi_2],\end{aligned}$$

которая оказывается эквивалентной системе уравнений на $z = z(x, y)$ и $\tau = \tau(x, y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Оператор Бельтрами-Лапласа

$$\Delta = g^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$

оказывается полезным при исследовании свойств метрики (3). Например, уравнение $\Delta\Psi = 0$ принимает вид

$$(ta_4 - za_3)\Psi_{zz} + 2(ta_3 - za_2)\Psi_{zt} + (ta_2 - za_1)\Psi_{tt} + \Psi_{xz} + \Psi_{yt} = 0,$$

и его решения оказываются связанными с геометрией метрики (3). Тогда, если подставить выражение $\Psi = \exp[zA + tB]$ в уравнение $\Delta\Psi = 0$, получим условия $A = \Phi_y$, $B = -\Phi_x$ и

$$a_4\Phi_y^2 - 2a_3\Phi_x\Phi_y + a_2\Phi_x^2 - \Phi_y\Phi_{xx} + \Phi_x\Phi_{xy} = 0.$$

Используя решения уравнения эйконала

$$g^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial F}{\partial x^j} = 0$$

или

$$F_x F_z + F_y F_t - (ta_4 - za_3) F_z F_z - 2(ta_3 - za_2) F_z F_t - (ta_2 - za_1) F_t F_t = 0,$$

можно исследовать свойства изотропных поверхностей в пространстве с метрикой (3). Решение этого уравнения, представленное в виде $F = A(x, y)z^2 + B(x, y)t^2$, отвечает следующему выбору коэффициентов в уравнении (1):

$$a_1 = \frac{AB_x}{2B^2} + \frac{A_x}{B}, \quad a_4 = -\frac{BA_y}{2A^2} - \frac{B_y}{A}, \quad a_2 = -\frac{B_y}{2B}, \quad a_3 = \frac{A_x}{2A}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Метрика (3) допускает представление в тетрадном виде $g_{ij} = \omega_i^a \omega_j^b \eta_{ab}$, где

$$\eta_{ab} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда получим $ds^2 = 2\omega^1\omega^3 + 2\omega^2\omega^4$, где

$$\begin{aligned} \omega^1 &= dx + dy, & \omega^2 &= dx + dy + \frac{1}{t(a_2 - a_4)}(dz - dt), \\ \omega^4 &= -t(a_4 dx + a_2 dy), & \omega^3 &= z(a_3 dx + a_1 dy) + \frac{1}{(a_2 - a_4)}(a_2 dz - a_4 dt), \\ a_1 + a_3 &= 2a_2, & a_2 + a_4 &= 2a_3. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Некоторые уравнения на тензоры кривизны пространства M^4 связаны с ОДУ. Например, из уравнения

$$R_{ij;k} + R_{jk;i} + R_{ki;j} = 0 \tag{5}$$

следуют ограничения на коэффициенты $a_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} \alpha_x'' + 2a_3\alpha'' - 2a_4\alpha' &= 0, \\ \alpha_y + 2a_1\alpha' - 2a_2\alpha &= 0, \\ \alpha_y'' + 2\alpha_x' + 4a_2\alpha'' - 2a_4\alpha - 2a_3\alpha' &= 0, \\ \alpha_x + 2\alpha_y' - 4a_3\alpha + 2a_2\alpha' + 2a_1\alpha'' &= 0. \end{aligned}$$

Решениями этой системы будут дифференциальные уравнения второго порядка, связанные с пространством M^4 , где на тензор Риччи наложено условие (5). Простейшие примеры таких уравнений имеют вид

$$y'' - \frac{3}{y}y'^2 + y^3 = 0, \quad y'' - \frac{3}{y}y'^2 + y^4 = 0.$$

4. ГЕОМЕТРИЯ ЭЙНШТЕЙНА–ВЕЙЛЯ В ТЕОРИИ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Соотношения, возникающие между уравнениями вида (1) и уравнением $b'' = g(a, b, b')$, где функция $g(a, b, b')$ удовлетворяет ОДУ

$$\begin{aligned} & g_{aacc} + 2cg_{abcc} + 2gg_{accc} + c^2g_{bbcc} + 2cgg_{bccc} + \\ & + g^2g_{cccc} + (g_a + cg_b)g_{ccc} - 4g_{abc} - 4cg_{bbc} - \\ & - cg_cg_{bcc} - 3gg_{bcc} - g_cg_{acc} + 4g_cg_{bc} - 3g_bg_{cc} + 6g_{bb} = 0, \end{aligned}$$

были исследованы Картаном [13] с геометрической точки зрения. Он показал, что тройки Эйнштейна–Вейля параметризуют семейства кривых, описываемых решениями уравнения (5), которое оказывается дуальным уравнению (1). Некоторые частные решения уравнения (5) были получены в работе [2].

Рассмотрим теперь примеры пространств Эйнштейна–Вейля. Приведем вкратце основные сведения об этих пространствах (см. [14]).

Пространство Вейля – это гладкое многообразие с заданной конформной метрикой $g_{ij}(x)$, с симметрической связностью

$$G_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \frac{1}{2}(\omega_i\delta_j^k + \omega_j\delta_i^k - \omega_l g^{kl}g_{ij})$$

и с условием ковариантного дифференцирования $D_i g_{kj} = \omega_i g_{kj}$, где $\omega_i(x)$ – компоненты векторного поля.

Тензор кривизны, отвечающий связности Вейля G_{ij}^k , имеет вид W_{jkl}^i , и тензор Риччи W_{ji}^i не обязан быть симметричным в общем случае: $W_{ji}^i \neq W_{ij}^i$.

Пространство Вейля, удовлетворяющее условию Эйнштейна

$$\frac{1}{2}(W_{jl} + W_{lj}) = \lambda(x)g_{jl}(x)$$

для некоторой функции $\lambda(x)$, собственно и называется *пространством Эйнштейна–Вейля*.

В трехмерном пространстве с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ компоненты вейлевской связности имеют вид

$$2G_1 = \begin{vmatrix} -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \end{vmatrix}, \quad 2G_2 = \begin{vmatrix} -\omega_2 & \omega_1 & 0 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ 0 & \omega_3 & -\omega_2 \end{vmatrix}, \quad 2G_3 = \begin{vmatrix} -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \end{vmatrix}.$$

Из уравнений пространства Эйнштейна–Вейля

$$W_{[ij]} = \frac{W_{ij} + W_{ji}}{2} = \lambda g_{ij}$$

получается система уравнений

$$\begin{aligned} & \omega_{3x} + \omega_{1z} + \omega_1\omega_3 = 0, \quad \omega_{3y} + \omega_{2z} + \omega_2\omega_3 = 0, \quad \omega_{2x} + \omega_{1y} + \omega_1\omega_2 = 0, \\ & 2\omega_{1x} + \omega_{2y} + \omega_{3z} - \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} = 2\lambda, \quad 2\omega_{2y} + \omega_{1x} + \omega_{3z} - \frac{\omega_1^2 + \omega_3^2}{2} = 2\lambda, \\ & 2\omega_{3z} + \omega_{2y} + \omega_{1x} - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} = 2\lambda. \end{aligned}$$

Первые три из этих уравнений приводят к уравнению Шази [15] $R''' + 2RR'' - 3R'^2 = 0$ на функцию

$$R = R(x + y + z) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3,$$

где $\omega_i = \omega_i(x + y + z)$, и эти функции задают обобщение классического уравнения Шази.

Геометрия Эйнштейна–Вейля для метрики $g_{ij} = \text{diag}(1, -e^U, -e^U)$ и вектор $\omega_i = (2U_z, 0, 0)$ определяются решениями уравнения [16]

$$U_{xx} + U_{yy} = (e^U)_{zz},$$

которое после подстановки $U = U(x + y = \tau, z)$ становится эквивалентным уравнению

$$U_\tau = (e^{U/2})_z,$$

допускающему многозначные решения.

Рассматривая структуру Эйнштейна–Вейля для метрики $ds^2 = dy^2 - 4dx dz - 4u dt^2$, получим бездисперсионное уравнение КП [17] $(U_t - UU_x)_x = U_{yy}$.

Благодарности. Автор благодарит физический факультет университета Рим 1 и университет г. Лечче за гостеприимство. Работа частично поддержана фондом MURST (Италия), Фондом Карипло (Научный центр Ландау–Вольта, Комо, Италия) и INTAS (грант № 99-01782).

Список литературы

- [1] V. Dryuma. Buletinul AS RM (mathematica), Kishinev. 1999. V. 3. № 31. P. 95–102.
- [2] V. Dryuma. Mathematical Researches (Kishinev). 1990. V. 112. P. 93–103.
- [3] V. S. Dryuma. On initial values problem in theory of the second order ODE's. In: Proc. Workshop on Nonlinearity, Integrability, and All That: Twenty years after NEEDS'79. Gallipoli (Lecce), Italy, July 1–July 10, 1999,. Eds. M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli, B. Prinari, G. Soliani. Singapore: World Scientific, 2000. P. 109–116.
- [4] В. С. Дрюма. О геометрии дифференциальных уравнений второго порядка. В сб.: Труды всесоюзной конференции “Нелинейные уравнения”. Ред. К. В. Фролов. М.: Наука, 1991. С. 41–48.
- [5] В. С. Дрюма. ТМФ. 1994. Т. 99. С. 241–249.
- [6] V. S. Dryuma. Geometrical properties of nonlinear dynamical systems. In: Proc. First Workshop on Nonlinear Physics. Le Sirenuse, Gallipoli (Lecce), Italy, June 29–July 7, 1995. Eds. E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli. Singapore: World Scientific, 1996. P. 83–93.
- [7] R. Liouville. J. École Polytec. 1889. V. 59. P. 7–76.
- [8] A. Tresse. Détermination des Invariants Ponctuels de l'Équation Differentielle Ordinaire de Second Ordre: $y'' = w(x, y, y')$. Preisschriften der fürstlichen Jablonowski'schen Gesellschaft. V. 32. Leipzig: S. Hirzel, 1896.
- [9] A. Tresse. Acta Math. 1894. V. 18. P. 1–88.
- [10] E. Cartan. Bull. Soc. Math. France. 1924. V. 52. P. 205–241.
- [11] E. M. Paterson, A. G. Walker. Quart. J. Math. Oxford. 1952. V. 3. P. 19–28.
- [12] E. Wilczynski. Trans. Am. Math. Soc. 1908. V. 9. P. 103–128.
- [13] E. Cartan. Ann. École Normale Sup. 1943. V. 14. P. 1–16.
- [14] H. Pedersen, K. P. Tod. Adv. Math. 1993. V. 97. P. 71–109.
- [15] J. Chazy. C. R. Acad. Sci. Paris. 1910. V. 150. P. 456–458.
- [16] R. Ward. Class. Q. Grav. 1980. V. 7. P. L45–L48.
- [17] M. Dunaisjski, L. Mason, P. Tod. Einstein–Weyl geometry, the dKP equation, and twistor theory. math.DG/0004031.