

© 2006 г.

В. С. Дрюма*

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Построен ряд примеров трехмерных метрик постоянной кривизны, определяемых решениями нелинейных интегрируемых дифференциальных уравнений и их обобщений. Исследованы свойства римановых расширений метрик постоянной кривизны. Рассмотрена связь с теорией нормальных римановых пространств.

Ключевые слова: римановы расширения, пространства постоянной кривизны, уравнение Кортевега–де Фриза.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метрики постоянной кривизны определяются следующими условиями на тензор кривизны:

$$R_{ijkl} - \lambda(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = 0. \quad (1)$$

В случае диагональной метрики (здесь и далее $(\vec{r}) = (x, y, x)$)

$$ds^2 = A^2(\vec{r}) dx^2 + B^2(\vec{r}) dy^2 + C^2(\vec{r}) dz^2$$

условия (1) эквивалентны системе дифференциальных уравнений на функции A , B , C , которые имеют вид

$$\partial_{yz}^2 A(\vec{r}) = \frac{\partial_z B(\vec{r}) \partial_y A(\vec{r})}{B(\vec{r})} + \frac{\partial_y C(\vec{r}) \partial_z A(\vec{r})}{C(\vec{r})}, \quad (2)$$

$$\partial_{xz}^2 B(\vec{r}) = \frac{\partial_z A(\vec{r}) \partial_x B(\vec{r})}{A(\vec{r})} + \frac{\partial_x C(\vec{r}) \partial_z B(\vec{r})}{C(\vec{r})}, \quad (3)$$

$$\partial_{xy}^2 C(\vec{r}) = \frac{\partial_y A(\vec{r}) \partial_x C(\vec{r})}{A(\vec{r})} + \frac{\partial_x B(\vec{r}) \partial_y C(\vec{r})}{B(\vec{r})}; \quad (4)$$

*Institute of Mathematics and Informatics AS Moldova, Kishinev, Moldova. E-mail: valery@dryuma.com, cainar@mail.md

$$\lambda C(\vec{r})B(\vec{r}) + \frac{\partial_x C(\vec{r}) \partial_x B(\vec{r})}{A^2(\vec{r})} + \frac{\partial_z^2 B(\vec{r})}{C(\vec{r})} - \frac{\partial_z B(\vec{r}) \partial_z C(\vec{r})}{C^2(\vec{r})} + \frac{\partial_y^2 C(\vec{r})}{B(\vec{r})} - \frac{\partial_y B(\vec{r}) \partial_y C(\vec{r})}{B^2(\vec{r})} = 0, \quad (5)$$

$$\lambda A(\vec{r})C(\vec{r}) - \frac{\partial_z A(\vec{r}) \partial_z C(\vec{r})}{C^2(\vec{r})} + \frac{\partial_z^2 A(\vec{r})}{C(\vec{r})} + \frac{\partial_y A(\vec{r}) \partial_y C(\vec{r})}{B^2(\vec{r})} + \frac{\partial_x^2 C(\vec{r})}{A(\vec{r})} - \frac{\partial_x A(\vec{r}) \partial_x C(\vec{r})}{A^2(\vec{r})} = 0, \quad (6)$$

$$\lambda B(\vec{r})A(\vec{r}) - \frac{\partial_x A(\vec{r}) \partial_x B(\vec{r})}{A^2(\vec{r})} + \frac{\partial_x^2 B(\vec{r})}{A(\vec{r})} + \frac{\partial_z A(\vec{r}) \partial_z B(\vec{r})}{C^2(\vec{r})} + \frac{\partial_y^2 A(\vec{r})}{B(\vec{r})} - \frac{\partial_y A(\vec{r}) \partial_y B(\vec{r})}{B^2(\vec{r})} = 0. \quad (7)$$

Здесь и далее мы используем обозначения

$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_{xx}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial x}, \quad \partial_{xy}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

и т.д. Решения полной системы уравнений (2)–(7) зависят от значений кривизны пространства λ и играют важную роль в геометрии трехмерных пространств.

Заметим, что первые три уравнения не зависят от параметра λ , и их решения являются общими для всех возможных уравнений, описывающих метрики пространств постоянной кривизны.

Система уравнений (2)–(4) как пример точно интегрируемой системы многомерных уравнений была найдена в работе [1] и исследовалась в работах [2] наряду с применением этих уравнений в задаче о триортогональной системе поверхностей в пространствах $\mathbb{R}P^3$ и $\mathbb{R}^3$.

2. ПРОСТРАНСТВО НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ $\lambda = 0$

Свойства пространств нулевой кривизны $\lambda = 0$ в диагональной метрике были исследованы в работе [3]. Здесь мы рассмотрим метрику недиагонального вида [4]

$$ds^2 = y^2 dx^2 + 2(l(x, z)y^2 + m(x, z)) dx dz + 2dy dz + (l^2(x, z)y^2 - 2(\partial_x l(x, z))y + 2l(x, z)m(x, z) + 2l(x, z)) dz^2 \quad (8)$$

с некоторыми функциями $l(x, z)$ и $m(x, z)$.

Условие на тензор кривизны $R_{ijkl} = 0$ для метрики (8) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} R_{1313} = & (\partial_x^3 l(x, z) - 3l(x, z)\partial_x l(x, z) + \partial_z l(x, z))y + \\ & + (-l(x, z)\partial_x^2 m(x, z) + \partial_{xz}^2 m(x, z) - \\ & - 3\partial_x l(x, z)\partial_x m(x, z) - 2m(x, z)\partial_x^2 l(x, z) - \partial_x^2 l(x, z)) - \\ & - \frac{1}{y}(-m(x, z)\partial_z m(x, z) + m(x, z)l(x, z)\partial_x m(x, z) + \\ & + \partial_x l(x, z)m(x, z) + 2\partial_x l(x, z)m^2(x, z)) = 0, \end{aligned}$$

$$R_{1323} = \frac{1}{y}(\partial_x l(x, z) - \partial_z m(x, z) + 2\partial_x l(x, z)m(x, z) + l(x, z)\partial_x m(x, z)) = 0,$$

которые эквивалентны системе уравнений для функций $l(x, z)$ и $m(x, z)$

$$\partial_x^3 l(x, z) - 3l(x, z)\partial_x l(x, z) + \partial_z l(x, z) = 0, \quad (9)$$

$$\partial_x l(x, z) - \partial_z m(x, z) + 2\partial_x l(x, z)m(x, z) + l(x, z)\partial_x m(x, z) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, может быть сформулирована следующая

ТЕОРЕМА 1. *Существует класс трехмерных плоских метрик, определяемый решениями системы уравнений (9), (10).*

Отметим, что первое из уравнений системы – известное уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ), и это обстоятельство может быть использовано для изучения свойств ортогональных метрик.

Рассмотрим некоторые примеры:

- 1) $l(x, z) = -x/(3z)$, $m(x, z) = -1/2 + F_1(z/x^3)x^{-2}$;
- 2) $l(x, z) = -4(\operatorname{ch}(x - 4z))^{-2}$, $m(x, z) = -1/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В простейшем случае трехмерные метрики нулевой кривизны имеют вид

$$\begin{aligned} ds^2 = & y^2 dx^2 + 2\left(l(x, z)y^2 - \frac{1}{2}\right)dx dz + 2dy dz + \\ & + (l^2(x, z)y^2 - 2\partial_x l(x, z)y + l(x, z))dz^2, \end{aligned}$$

где функция $l(x, z)$ является решением классического уравнения КдФ

$$\partial_z l(x, z) - 3l(x, z)\partial_x l(x, z) + \partial_x^3 l(x, z) = 0.$$

В частности, функции

$$l(x, z) = -4(\operatorname{ch}(x - 4z))^{-2}$$

и

$$l(x, z) = -24 \frac{4 \operatorname{ch}(2x - 8z) + \operatorname{ch}(4x - 64z) + 3}{(3 \operatorname{ch}(x - 28z) + \operatorname{ch}(3x - 36z))^2}$$

доставляют примеры метрик подобного типа.

Несмотря на то что определитель метрик не зависит от функции $l(x, z)$, их свойства можно охарактеризовать с помощью уравнения на собственные значения для оператора Лапласа, определенного на 1-формах,

$$A(\vec{r}) = A_i(\vec{r}) dx^i,$$

которое имеет вид

$$g^{ij} \nabla_i \nabla_j A_k - R_k^l A_l = -\lambda A_k.$$

В частном случае $l(x, z) = 0$ и $A_i(\vec{r}) = [h(y), q(y), f(y)]$ эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4y^3} [h'(y) - 4f'(y)y^2 - h''(y)y + 4\lambda h(y)y^3] &= 0, \\ -\frac{1}{4y^4} [-6h(y) - 3q(y) + 3q'(y)y + 4h'(y)y - \\ &\quad - q''(y)y^2 + 4f(y)y^2 + 4\lambda q(y)y^4] = 0, \\ -\frac{1}{4y^3} [f'(y) - f''(y)y + 4\lambda f(y)y^3] &= 0. \end{aligned}$$

Решения этой системы зависят от собственных значений λ и характеризуют свойства соответствующих плоских метрик.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теории многообразий характеристический класс Черна–Саймонса строится из матричной калибровочной связности A_{jk}^i следующим образом:

$$W(A) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} \text{tr} \left(\frac{1}{2} A_i \partial_j A_k + \frac{1}{3} A_i A_j A_k \right).$$

Этот член можно превратить в трехмерную геометрическую величину, заменив матричную связность A_{jk}^i на связность Кристоффеля Γ_{jk}^i .

Для плотности инварианта Черна–Саймонса можно получить выражение [5]

$$CS(\Gamma) = \epsilon^{ijk} \left(\Gamma_{iq}^p \Gamma_{kp;j}^q + \frac{2}{3} \Gamma_{iq}^p \Gamma_{jr}^q \Gamma_{kp}^r \right). \quad (11)$$

Для метрики (8) находим

$$\begin{aligned} CS(\Gamma) = & -\frac{5l(x, z) \partial_x l(x, z) - 5 \partial_z l(x, z)}{\sqrt{y^2}} - \\ & - \frac{3l(x, z) \partial_x m(x, z) - 4(\partial_x l(x, z))m(x, z) - 3 \partial_z m(x, z) - 2 \partial_x l(x, z)}{y^2 \sqrt{y^2}}. \end{aligned}$$

Используя эту формулу, получаем для первого примера

$$CS(\Gamma) = \frac{10}{9} \frac{x \text{sign}(y)}{z^2 y} - \frac{10}{3} F_1 \left(\frac{z}{x^3} \right) \text{sign}(y) z^{-1} x^{-2} y^{-3}$$

и для второго примера

$$CS(\Gamma) = 160 \frac{\operatorname{ch}(x - 4z) (\operatorname{sh}(x - 4z))^3 \operatorname{sign}(y)}{y}.$$

3. МЕТРИКИ НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ $\lambda \neq 0$

Метрика пространства положительной кривизны $\lambda = 1$ определяется формулой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + (x^2 + y^2 + z^2)/4)^2}, \quad (12)$$

а метрика пространства отрицательной кривизны $\lambda = -1$ имеет вид

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}. \quad (13)$$

Исходя из этих выражений можно получить более общие примеры метрик постоянной кривизны.

Например, подстановка выражений

$$A(\vec{r}) = \frac{1}{z}, \quad B(\vec{r}) = \frac{1}{z} + v(z), \quad C(\vec{r}) = \frac{1}{z} + u(z)$$

в систему (2)–(7) и интегрирование соответствующих уравнений для функций $u(z)$ и $v(z)$ дает метрику

$$ds^2 = \frac{dx^2}{z^2} + (z^{-2} - 1) dy^2 + \frac{dz^2}{z^2(1 - z^2)}$$

отрицательной кривизны $\lambda = -1$.

Подстановка

$$A(\vec{r}) = \left(1 + \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right)^{-1} + U(\vec{r})$$

в систему (2)–(7) и интегрирование соответствующих уравнений приводит к метрикам

$$ds^2 = A^2(\vec{r}) dx^2 + \frac{dy^2 + dz^2}{(1 + (x^2 + y^2 + z^2)/4)^2}$$

с функцией $A(\vec{r})$ вида

$$A(\vec{r}) = 4 \frac{\sqrt{x^2(x^2 - 4\lambda + 4)}}{(x^2 - 4\lambda + 4)(4 + x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Инвариант Черна–Саймонса ортогональной трехмерной метрики с условиями (2)–(4) на компоненты дается выражением

$$CS(\Gamma) = \frac{10}{A(\vec{r})B(\vec{r})C(\vec{r})} [\partial_y A(\vec{r}) \partial_z B(\vec{r}) \partial_x C(\vec{r}) - \partial_z A(\vec{r}) \partial_x B(\vec{r}) \partial_y C(\vec{r})]. \quad (14)$$

После подстановки компонент метрики (13) в это выражение получаем

$$CS(\Gamma) = 0.$$

Как следует из (14), класс трехмерных ортогональных метрик с обращающимся в нуль инвариантом Черна–Саймонса определяется условием

$$\partial_z A(\vec{r}) \partial_x B(\vec{r}) \partial_y C(\vec{r}) - \partial_y A(\vec{r}) \partial_z B(\vec{r}) \partial_x C(\vec{r}) = 0. \quad (15)$$

Метрики вида

$$ds^2 = 2E(\vec{r}) dx dy + dz^2$$

являются метриками постоянной кривизны, если функция $E(\vec{r})$ определяется выражением

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4} \frac{(F(x, y) \sin(\sqrt{\lambda}z) - F(x, y) \cos(\sqrt{\lambda}z))^2}{\lambda},$$

где

$$-4\partial_y F(x, y) \partial_x F(x, y) + 4F(x, y) \partial_{xy}^2 F(x, y) + F^4(x, y) = 0,$$

или после подстановки $F(x, y) = e^{U(x, y)}$

$$4\partial_{xy}^2 U(x, y) + e^{2U(x, y)} = 0.$$

Последнее уравнение – это известное уравнение Лиувилля с общим решением

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left(-4 \frac{a'(x) b'(y)}{(a^2(x) + b^2(y))^2} \right).$$

Инвариант Черна–Саймонса для таких метрик обращается в нуль.

Рассмотрим метрики вида

$$ds^2 = dx^2 + 2 \cos u(x, y) dx dy + A^2(x, y) dz^2.$$

Условия (1) приводят к линейной системе уравнений

$$\begin{aligned} \partial_{xy}^2 A(x, y) + \lambda A(x, y) \cos u(x, y) &= 0, \\ \partial_x^2 A(x, y) - \frac{\cos u(x, y) \partial_x u(x, y) \partial_x A(x, y)}{\sin u(x, y)} + \\ &+ \lambda A(x, y) + \frac{\partial_x u(x, y) \partial_y A(x, y)}{\sin u(x, y)} = 0, \\ \partial_y^2 A(x, y) - \frac{\cos u(x, y) \partial_y u(x, y) \partial_y A(x, y)}{\sin u(x, y)} + \\ &+ \lambda A(x, y) + \frac{\partial_x A(x, y) \partial_y u(x, y)}{\sin u(x, y)} = 0, \end{aligned}$$

которая совместна на решениях уравнения синус-Гордон ($\lambda = -\mu$)

$$\partial_{xy}^2 u(x, y) + \lambda \sin u(x, y) = 0. \quad (16)$$

Таким образом, для любого решения уравнения синус-Гордон можно найти функцию $A(x, y)$, решив соответствующую линейную систему уравнений.

Рассмотрим пример. Простейшее решение уравнения (16) при $\lambda = -1$ дается формулой

$$u(x, y) = 4 \operatorname{arctg}(e^{x+y}).$$

В этом случае линейная система принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_{xy}^2 A(x, y) + \frac{(6e^{2x+2y} - 1 - e^{4x+4y})A(x, y)}{(1 + e^{2x+2y})^2} &= 0, \\ (1 - e^{4x+4y})A(x, y) + (-2e^{2x+2y} - e^{4x+4y} - 1)\partial_y A(x, y) + \\ &+ (-6e^{2x+2y} + 1 + e^{4x+4y})\partial_x A(x, y) + (-1 + e^{4x+4y})\partial_x^2 A(x, y) = 0, \\ (1 - e^{4x+4y})A(x, y) + (-6e^{2x+2y} + 1 + e^{4x+4y})\partial_y A(x, y) + \\ &+ (-2e^{2x+2y} - e^{4x+4y} - 1)\partial_x A(x, y) + (-1 + e^{4x+4y})\partial_y^2 A(x, y) = 0, \end{aligned}$$

а ее решение есть

$$A(x, y) = \frac{e^{x+y}}{1 + e^{2x+2y}}.$$

4. ПРИМЕРЫ СУЩЕСТВЕННО ТРЕХМЕРНЫХ МЕТРИК

Рассмотрим семейство трехмерных метрик вида

$$ds^2 = dx^2 + 2 \cos B(\vec{r}) dx dy + dy^2 + (\partial_z B(\vec{r}))^2 dz^2.$$

Условия (1) для таких метрик приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_{xy}^2 B(\vec{r}) + \frac{1}{4} \sin B(\vec{r})(-1 + 4\lambda) &= 0, \\ \partial_{yyz}^3 B(\vec{r}) - \frac{\cos B(\vec{r}) \partial_y B(\vec{r}) \partial_{yz}^2 B(\vec{r})}{\sin B(\vec{r})} + \\ &+ \frac{\partial_{xz}^2 B(\vec{r}) \partial_y B(\vec{r})}{\sin B(\vec{r})} - \left(\frac{1}{4} - \lambda\right) \partial_z B(\vec{r}) = 0, \\ \partial_{xxz}^3 B(\vec{r}) - \frac{\cos B(\vec{r}) \partial_x B(\vec{r}) \partial_{xz}^2 B(\vec{r})}{\sin B(\vec{r})} + \\ &+ \frac{\partial_x B(\vec{r}) \partial_{yz}^2 B(\vec{r})}{\sin B(\vec{r})} - \left(\frac{1}{4} - \lambda\right) \partial_z B(\vec{r}) = 0. \end{aligned}$$

Эта система совместна, и ее решения дают примеры трехмерных метрик постоянной кривизны.

Член Черна–Саймонса в этом случае определяется выражением

$$CS(\Gamma) = -\frac{5}{2}\partial_{xz}^2 B(\vec{r}) \partial_y B(\vec{r}) + \frac{5}{2}\partial_x B(\vec{r}) \partial_{yz}^2 B(\vec{r}).$$

Рассмотрим пример. Для простоты представим метрику в эквивалентном виде

$$ds^2 = dx^2 + 2u(\vec{r}) dx dy + dy^2 + \frac{(\partial_z u(\vec{r}))^2 dz^2}{1 - u^2(\vec{r})},$$

где функция $u(\vec{r})$ определяется из условия

$$u(\vec{r}) = \arccos(B(\vec{r})).$$

Система уравнений для функции $B(\vec{r})$ переходит при этом в более простую систему для функции $u(\vec{r})$, интегрирование которой при условии $\lambda = 1/4$ приводит к метрике

$$ds^2 = dx^2 + \frac{1}{2} \frac{(z^4 f^2(x) h^2(y) + 1) dx dy}{z^2 f(x) h(y)} + dy^2 - 4 \frac{dz^2}{z^2},$$

где $f(x)$, $h(y)$ – произвольные функции. Тензор Риччи в этом случае равен

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \frac{z^4 f^2(x) h^2(y) + 1}{z^2 f(x) h(y)} & 0 \\ \frac{1}{4} \frac{z^4 f^2(x) h^2(y) + 1}{z^2 f(x) h(y)} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2z^{-2} \end{bmatrix}.$$

Инвариант Черна–Саймонса этой метрики равен нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Абсолютное значение кривизны $\lambda = 1/4$ является особым значением в теории римановых многообразий и связано с теорией многообразий заземленной кривизны.

5. РИМАНОВЫ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ $\lambda = \pm 1, 0$

Пространство с диагональной метрикой имеет следующие коэффициенты связности:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\partial_x A(\vec{r})}{A(\vec{r})}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{A(\vec{r}) \partial_y A(\vec{r})}{B^2(\vec{r})}, \\ \Gamma_{11}^3 &= -\frac{A(\vec{r}) \partial_z A(\vec{r})}{C^2(\vec{r})}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{\partial_y A(\vec{r})}{A(\vec{r})}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{\partial_x B(\vec{r})}{B(\vec{r})}, \\ \Gamma_{12}^3 &= 0, & \Gamma_{13}^1 &= \frac{\partial_z A(\vec{r})}{A(\vec{r})}, & \Gamma_{13}^2 &= 0, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{\partial_x C(\vec{r})}{C(\vec{r})}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{B(\vec{r}) \partial_x B(\vec{r})}{A^2(\vec{r})}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\partial_y B(\vec{r})}{B(\vec{r})}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^3 &= -\frac{B(\vec{r})\partial_z B(\vec{r})}{C^2(\vec{r})}, & \Gamma_{23}^1 &= 0, & \Gamma_{23}^2 &= \frac{\partial_z B(\vec{r})}{B(\vec{r})}, \\
\Gamma_{23}^3 &= \frac{\partial_y C(\vec{r})}{C(\vec{r})}, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{C(\vec{r})\partial_x C(\vec{r})}{A^2(\vec{r})}, \\
\Gamma_{33}^2 &= -\frac{C(\vec{r})\partial_y C(\vec{r})}{B^2(\vec{r})}, & \Gamma_{33}^3 &= \frac{\partial_z C(\vec{r})}{C(\vec{r})}.
\end{aligned}$$

Используя эти выражения, введем шестимерную метрику

$${}^6 ds^2 = -2\Gamma_{jk}^i dx^j dx^k \psi_i + 2dx^i d\psi_i, \quad (18)$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 – некоторые дополнительные координаты [6].

Тензор Риччи метрики (18) обращается в нуль при выполнении условий (2)–(7), $\lambda = 0$, и тензор Римана ${}^6 R_{ijkl}$ также обращается в нуль в этом случае. Таким образом, в результате риманова расширения плоской трехмерной диагональной метрики $\lambda = 0$ с помощью коэффициентов (17) мы получаем шестимерное плоское пространство ${}^6 R_{ijkl} = 0$ с сигнатурой $[+++--]$.

Тензор Риччи метрики (1) при условиях (2)–(7) имеет компоненты

$$\begin{aligned}
R_{11} &= 2\lambda A^2(\vec{r}), & R_{22} &= 2\lambda B^2(\vec{r}), & R_{33} &= 2\lambda C^2(\vec{r}), \\
R_{12} &= 0, & R_{13} &= 0, & R_{23} &= 0,
\end{aligned}$$

и соответствующее пространство в случае $\lambda = \pm 1$ является симметричным со следующими условиями на тензор кривизны:

$${}^3 R_{ijkl;m} = 0.$$

Замечательное обстоятельство состоит в том, что в результате риманова расширения пространства постоянной кривизны мы получаем симметричное пространство.

ТЕОРЕМА 2. *Риманово расширение трехмерного пространства постоянной кривизны представляет собой шестимерное симметричное пространство*

$${}^6 R_{ijkl;m} = 0.$$

Данное утверждение может быть доказано прямым вычислением.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае $\Gamma_{23}^1 \neq 0$, $\Gamma_{12}^3 \neq 0$, $\Gamma_{13}^2 \neq 0$ можно получить шестимерную искривленную метрику

$${}^6 ds^2 = -2\Gamma_{jk}^i dx^j dx^k \psi_i + 2dx^i d\psi_i \quad (19)$$

с условиями

$$\Gamma_{13}^2 = \frac{C(\vec{r})A(\vec{r})}{B(\vec{r})}, \quad \Gamma_{12}^3 = \frac{A(\vec{r})B(\vec{r})}{C(\vec{r})}, \quad \Gamma_{23}^1 = \frac{B(\vec{r})C(\vec{r})}{A(\vec{r})}$$

для пространств кривизны $\lambda = 1$ и условиями

$$\Gamma_{13}^2 = \frac{iC(\vec{r})A(\vec{r})}{B(\vec{r})}, \quad \Gamma_{12}^3 = \frac{iA(\vec{r})B(\vec{r})}{C(\vec{r})}, \quad \Gamma_{23}^1 = \frac{iB(\vec{r})C(\vec{r})}{A(\vec{r})}$$

для пространств кривизны $\lambda = -1$. Для коэффициентов связности такого вида мы получаем обобщение системы уравнений Дарбу

$$\begin{aligned} \partial_{yz}^2 A(\vec{r}) &= \frac{\partial_z B(\vec{r}) \partial_y A(\vec{r})}{B(\vec{r})} + \frac{\partial_y C(\vec{r}) \partial_z A(\vec{r})}{C(\vec{r})} + \\ &\quad + 2\partial_x(B(\vec{r})C(\vec{r})), \\ \partial_{xz}^2 B(\vec{r}) &= \frac{\partial_z A(\vec{r}) \partial_x B(\vec{r})}{A(\vec{r})} + \frac{\partial_x C(\vec{r}) \partial_z B(\vec{r})}{C(\vec{r})} + \\ &\quad + 2\partial_y(A(\vec{r})C(\vec{r})), \\ \partial_{xy}^2 C(\vec{r}) &= \frac{\partial_y A(\vec{r}) \partial_x C(\vec{r})}{A(\vec{r})} + \frac{\partial_x B(\vec{r}) \partial_y C(\vec{r})}{B(\vec{r})} + \\ &\quad + 2\partial_z(A(\vec{r})B(\vec{r})), \end{aligned} \tag{20}$$

которое может быть полезно в приложениях.

Например, простейшим решением этой системы является решение

$$A(\vec{r}) = e^{z/4-x}, \quad B(\vec{r}) = e^{y-z/4}, \quad C(\vec{r}) = e^{z/4},$$

которое соответствует метрике (19) шестимерного многообразия с соответствующими условиями на тензор кривизны.

6. НОРМАЛЬНЫЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Понятие нормального риманова пространства было впервые введено Эйзенхартом. Свойства таких пространств были исследованы в работе [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. n -Мерное риманово пространство $N(x^k)$ с метрикой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

является нормальным, если выполнены следующие условия на главные кривизны K_i :

$$\partial_{x^l} K_l = 3\lambda_l + 3\mu_l K_l, \quad i = l,$$

и

$$\begin{aligned} \partial_{x^l} K_i &= \lambda_l + \mu_l K_i, \quad i \neq l, \\ \partial_{x^l} \ln g_{ij} &= \frac{2}{K_l - K_i} \partial_{x^l} K_i, \quad i \neq l, \end{aligned}$$

где λ и μ — функции координат x^k .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Значения K_i суть корни алгебраического уравнения

$$|b_{ij} - \kappa g_{ij}| = 0$$

относительно тензора второго ранга b_{ij} , определенного в данном римановом пространстве.

В трехмерном случае главные кривизны K_i удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} (K_2 - K_3)\partial_x K_1 + 3(K_3 - K_1)\partial_x K_2 + 3(K_1 - K_2)\partial_x K_3 &= 0, \\ 3(K_2 - K_3)\partial_y K_1 + (K_3 - K_1)\partial_y K_2 + 3(K_1 - K_2)\partial_y K_3 &= 0, \\ 3(K_2 - K_3)\partial_z K_1 + 3(K_3 - K_1)\partial_z K_2 + (K_1 - K_2)\partial_z K_3 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Связи между системами уравнений Дарбу (2)–(4) и системой (21) были впервые установлены в работе [8].

ТЕОРЕМА 3. Система уравнений (21) для главных кривизн трехмерных нормальных пространств превращается в систему уравнений

$$\begin{aligned} \partial_{xy}^2 K_1(\vec{r}) + \frac{\partial_y A(\vec{r}) \partial_x K_1(\vec{r})}{A(\vec{r})} + \\ + \left(\frac{\partial_x A(\vec{r})}{A(\vec{r})} + \frac{\partial_x B(\vec{r})}{B(\vec{r})} - \frac{\partial_{xy}^2 A(\vec{r})}{\partial_y A(\vec{r})} \right) \partial_y K_1(\vec{r}) &= 0, \\ \partial_{xz}^2 K_1(\vec{r}) + \frac{\partial_z A(\vec{r}) \partial_x K_1(\vec{r})}{A(\vec{r})} + \\ + \left(\frac{\partial_x C(\vec{r})}{C(\vec{r})} + \frac{\partial_x A(\vec{r})}{A(\vec{r})} - \frac{\partial_{xz}^2 A(\vec{r})}{\partial_z A(\vec{r})} \right) \partial_z K_1(\vec{r}) &= 0, \\ \partial_{yz}^2 K_1(\vec{r}) + \left(\frac{\partial_z B(\vec{r})}{B(\vec{r})} + \frac{\partial_z A(\vec{r})}{A(\vec{r})} - \frac{\partial_{yz}^2 A(\vec{r})}{\partial_y A(\vec{r})} \right) \partial_y K_1(\vec{r}) + \\ + \left(-\frac{\partial_y A(\vec{r}) \partial_z B(\vec{r})}{\partial_z A(\vec{r}) B(\vec{r})} + \frac{\partial_y A(\vec{r})}{A(\vec{r})} \right) \partial_z K_1(\vec{r}) &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

если выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \partial_y K_1(\vec{r}) - \frac{\partial_y A(\vec{r}) [K_2(\vec{r}) - K_1(\vec{r})]}{A(\vec{r})} &= 0, \\ \partial_z K_1(\vec{r}) + \frac{\partial_z A(\vec{r}) [-K_3(\vec{r}) + K_1(\vec{r})]}{A(\vec{r})} &= 0, \\ \partial_x K_2(\vec{r}) + \frac{\partial_x B(\vec{r}) [K_2(\vec{r}) - K_1(\vec{r})]}{B(\vec{r})} &= 0, \\ \partial_z K_2(\vec{r}) + \frac{\partial_z B(\vec{r}) [K_2(\vec{r}) - K_3(\vec{r})]}{B(\vec{r})} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_x K_3(\vec{r}) - \frac{\partial_x C(\vec{r}) [-K_3(\vec{r}) + K_1(\vec{r})]}{C(\vec{r})} &= 0, \\ \partial_y K_3(\vec{r}) - \frac{\partial_y C(\vec{r}) [K_2(\vec{r}) - K_3(\vec{r})]}{C(\vec{r})} &= 0.\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Аналогичные уравнения могут быть выписаны и для компонент K_2 и K_3 . Для величины $K_2(\vec{r})$, например, получаем

$$\begin{aligned}\partial_{xy}^2 K_2(\vec{r}) + \frac{\partial_x B(\vec{r}) \partial_y K_2(\vec{r})}{B(\vec{r})} + \\ + \left(\frac{\partial_y B(\vec{r})}{B(\vec{r})} + \frac{\partial_y A(\vec{r})}{A(\vec{r})} - \frac{\partial_{xy}^2 B(\vec{r})}{\partial_y B(\vec{r})} \right) \partial_x K_2(\vec{r}) &= 0, \\ \partial_{xz}^2 K_2(\vec{r}) + \left(\frac{\partial_z B(\vec{r})}{B(\vec{r})} - \frac{\partial_x C(\vec{r}) \partial_z B(\vec{r})}{C(\vec{r}) \partial_x B(\vec{r})} \right) \partial_x K_2(\vec{r}) + \\ + \left(\frac{\partial_x B(\vec{r})}{B(\vec{r})} - \frac{\partial_{xz}^2 B(\vec{r})}{\partial_z B(\vec{r})} + \frac{\partial_x C(\vec{r})}{C(\vec{r})} \right) \partial_z K_2(\vec{r}) &= 0, \\ \partial_{yz}^2 K_1(\vec{r}) + \frac{\partial_z B(\vec{r}) \partial_z K_2(\vec{r})}{B(\vec{r})} + \\ + \left(\frac{\partial_y C(\vec{r})}{C(\vec{r})} + \frac{\partial_y B(\vec{r})}{B(\vec{r})} - \frac{\partial_{yz}^2 B(\vec{r})}{\partial_z B(\vec{r})} \right) \partial_z K_2(\vec{r}) &= 0.\end{aligned}\tag{23}$$

Важно отметить, что уравнения (22) и (23) представляют собой линейные системы уравнений с условиями совместности в виде системы Дарбу (2)–(4). Это свойство будет в дальнейшем использовано для изучения решений полной системы уравнений Ламе (2)–(7).

Представим теперь некоторые решения системы (21).

Заметим, что из системы (21) вытекают соотношения

$$K_i(\vec{r})(\phi_j - \phi_l) + K_j(\vec{r})(\phi_l - \phi_i) + K_l(\vec{r})(\phi_i - \phi_j) = 0, \quad i \neq j \neq l,$$

где $\phi_i = \phi_i(x^i)$ – произвольные зависящие от переменной x^i функции. Это ограничительное условие вместе с уравнениями (21) приводит к системе уравнений на функции $K_i(\vec{r})$.

Для величины $K_1(\vec{r})$, например, получаем

$$\begin{aligned}\partial_{xy}^2 K_1(\vec{r}) - \frac{1 - \partial_x K_1(\vec{r}) b'(y) + 3a'(x) \partial_y K_1(\vec{r})}{2(a(x) - b(y))} &= 0, \\ \partial_{xz}^2 K_1(\vec{r}) - \frac{1 - 3a'(x) \partial_z K_1(\vec{r}) - c'(z) \partial_x K_1(\vec{r})}{2(a(x) - c(z))} &= 0, \\ \partial_{yz}^2 K_1(\vec{r}) - \frac{1 - \partial_y K_1(\vec{r}) c'(z) + \partial_z K_1(\vec{r}) b'(y)}{2(b(y) - c(z))} &= 0,\end{aligned}$$

где $a(x)$, $b(y)$, $c(z)$ – произвольные функции.

Используя уравнения (22), можно показать, что компоненты метрики пространства Дарбу при данных условиях на главные кривизны суть

$$\begin{aligned} A(\vec{r}) &= \frac{U(x)}{\sqrt{a(x) - b(y)}\sqrt{a(x) - c(z)}}, \\ B(\vec{r}) &= \frac{V(y)}{(a(x) - b(y))^{5/2}\sqrt{b(y) - c(z)}}, \\ C(\vec{r}) &= \frac{W(z)}{(a(x) - c(z))^{5/2}\sqrt{b(y) - c(z)}}. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] В. С. Дрюма. Проективные свойства “слабо коммутирующих” семейств операторов. В сб.: IX Всесоюзная геометрическая конференция (Кишинев, 20–22 сентября 1988 г.). Тезисы сообщений. Ред. А. М. Заморзаев. Кишинев: Птиинца, 1988. С. 104–105.
- [2] В. С. Дрюма. Математические исследования. 1992. Т. 124. С. 54–68; ТМФ. 1993. Т. 99. № 2. С. 241–249.
- [3] V. Zakharov. Duke Math. J. 1998. V. 94. № 1. P. 103–139.
- [4] T. Wolf. J. Math. Phys. 1986. V. 27. № 9. P. 2354–2359.
- [5] R. Jackiw. A pure cotton kink in a funny place. math-ph/0403044.
- [6] E. M. Paterson, A. G. Walker. Quart. J. Math. (Oxford Ser.). 1952. V. 3. P. 19–28; V. Dryuma. Mat. Fiz. Anal. Geom. 2003. V. 10. № 3. P. 1–19; The Riemann and Einstein–Weyl geometries in the theory of ODE’s, their applications and all that. In: New Trends in Integrability and Partial Solvability. Proc. of the NATO Advanced Research Workshop (Cadiz, Spain, June 12–16, 2002). NATO Sci. Ser. II: Math., Phys., Chem. V. 132. Eds. A. B. Shabat et al. Dordrecht: Kluwer, 2004. P. 115–156; В. Дрюма. ТМФ. 2001. Т. 128. № 1. С. 15–26; nlin: SI/0303023.
- [7] В. Собчук. Тр. семин. вектор. тензор. анал. 1968. Т. 15. С. 65–76.
- [8] V. Dryuma. Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. 1998. V. 1. № 26. P. 55–68.